수정 : 2011년 7월17일

사칙연산의 의미 및 계산순서

① 사칙연산

덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 등 4가지 수의 계산방법을 총칭하는 용어

● 덧셈의 의미

- 일차원 단위길이 1의 크기를 기준하여 상대적인 크기를 계산하면 ?

1+1 = 2 단위길이 1에 단위길이 1만큼 더하면 단위길이의 2배이다.

0.5+1 =1.5 단위길이 1의 1/2의 해당하는 길이에 단위길이 1을 더하면 1.5에 해당한다.

● 뺄셈의 의미

- 앞에 있는 일차원의 길이 크기에서 뒤에 있는 일차원의 길이를 빼면 남는 길이는 ?

1-1 = 0 단위길이 1에서 같은 단위 길이를 빼면 0이 된다.

1.0-0.5 = 0.5 단위길이 1에 1/2에 해당하는 길이를 빼면 1/2이 남는다.

● 곱셈의 의미

- 이차원의 단위면적 1의 크기를 기준으로 면적의 상대적인 크기 비를 계산하면

1*1 = 1 단위길이 * 단위길이는 단위면적 1에 해당한다.

0.5*0.5 = 0.25 단위면적 1에 비하여 25%(1/4)에 해당한다.

● 나눗셈의 의미

- 앞에 있는 면적의 크기에는 뒤에 있는 수의 면적이 몇 개가 들어갈까 ?

1/1 = 1 앞에 있는 면적1에는 뒤에 있는 면적1이 한 개 들어감

1/0.5=2.0 앞에 있는 면적 1에는 뒤에 있는 면적 0.5가 2개 들어감

② 사칙연산의 계산순위 및 수식계산의 의미

덧셈과 뺄셈은 1차원 즉, 단위길이 비의 계산이고 곱셈과 나눗셈은 2차원 측면에서의 면적 크기 비의 계산이다. 그러면 사칙연산이 나열되어 있을 때의 수식 $1+2*3$와 $1*2+3$의 차이점은 무엇일까 ? 차이점을 비교하기 전에 우리는 사칙연산의 수식을 계산하는데 있어서 계산 순위를 정해야 한다.

● 사칙연산의 계산순위

계산의 순위는 다음과 같다. “ 수식의 계산은 왼쪽에서 오른쪽으로 차례대로 하되, 괄호를 우선으로 하고 곱셈과 나눗셈을 덧셈과 뺄셈보다 먼저 한다.”

예를 들어, 1+2×3의 경우 곱셈을 먼저 하니까 2×3=6를 구한 다음, 1에 그 결과를 더하여 7이 된다.

●“ 왜 곱셈을 덧셈보다 먼저 하는 걸로 규칙을 정했을까 ?”

중위표기법 그리고 경험에 의해서 이다.

연산 기호 +와 ×는 그 기호의 앞뒤에 있는 두 수를 가지고 계산한 결과를 구하라는 뜻이다.

앞과 뒤 두 개의 수를 가지고 연산한다는 뜻에서 이런 연산을 “이항(二項) 연산”이라 하고, 연산하려는 두 수 사이에 기호를 쓴다는 뜻에서 이런 표기법을 “중위(中位)표기법(infix notation)”이라 한다.

곱셈을 덧셈보다 먼저 하는 규칙은 반드시 그래야만 하는 논리적인 이유가 있다기보다는 경험적이고 역사적인 결과로서 정해진 것이라 할 수 있다.

● 수식계산의 의미

곱셈/나눗셈으로 계산된 단위면적의 크기 비에 대한 계산결과는 덧셈/뺄셈의 수식으로 들어오면 단위면적이 아닌 단위길이와 비교된 수로 의미가 바뀌어 계산된다.

수식 $1+2*3$와 $1*2+3$을 계산하면 값은 7, 5이다.

▷ $1+2*3$의 경우, $2*3$을 계산하면 단위면적 크기 1의 6배가 된다. 다음으로 $1+6$의 계산은 단위길이 1에 비하여 6배 긴 단위길이를 더하라는 의미로 바뀌어 결과가 7이 된다.

▷ $1*2+3$의 경우, $1*2$를 계산하면 결과는 단위면적 크기의 2배가 된다. 다음으로 $2+3$의 계산은 단위길이 2배에 단위길이 3배 긴 길이를 더하라는 의미로 바뀌어 5가 된다.

● 음수와 음수의 곱은 양수가 된다

음수와 음수를 곱하면 양수가 된다는데, 그냥 그렇다고 외우기만 했을 뿐, 그 이유를 생각해 보지 못했다. 음수끼리 더하면 여전히 음수인데 왜 곱하면 양수가 될까 ? 생각해 보면, 곱이 양수가 되는 것 이전에 음수끼리의 곱셈도 이해하기 어렵다. 음수와 음수의 곱은 도대체 무엇일까 ? 음수는 무리수보다 더 늦게 발견됐었다. 즉, 음수의 연산을 보편적으로 받아들인 것이 무리수를 받아들인 것보다 나중인 것을 보면, 음수에 대한 거부감 내지는 공포감이 얼마나 심했는지 알 만하다.

왜 음수 곱하기 음수가 양수가 되는지 알아보자.

① 규칙성

$2\times2=4$	$1\times2=2$	$0\times2=0$	$-1\times2=-2$	$-2\times2=-4$
$2\times1=2$	$1\times1=1$	$0\times1=0$	$-1\times1=-1$	$-2\times1=-2$
$2\times0=0$	$1\times0=0$	$0\times0=0$	$-1\times0=0$	$-2\times0=0$
$2\times-1=-2$	$1\times-1=-1$	$0\times-1=0$	$-1\times-1=1$	$-2\times-1=2$
$2\times-2=-4$	$1\times-2=-2$	$0\times-2=0$	$-1\times-2=2$	$-2\times-2=4$

위의 곱셈표를 보자. 가로줄을 보면, 곱해지는 수를 하나씩 줄임에 따라 곱셈의 결과도 일정하게 변한다. 세로줄을 보면 곱하는 수를 하나씩 줄임에 따라 역시 일정하게, 첫 번째 세로줄은 2씩 줄고, 두 번째 줄은 1씩 줄고, 세 번째 줄은 0으로 변함이 없고, 네 번째 줄은 1씩 늘고, 다섯 번째 줄은 2씩 늘고 있다. 따라서 다음 가로줄을 만들면 아래와 같이 되어야 원래의 규칙이 유지된다. 이로부터 음수에 음수를 곱하면 양수가 되는 것이 자연스럽다는 것을 알 수

있다.

② 수학적 증명 $(-a)*(-b)=ab$

$$(-a)*(-b)=ab$$

$(-a)*(-b)-a*b=0$ 의 증명

증명] 양변에 $a*(-b)$를 더하면

$$(-a)*(-b)-a*b+a*(-b)=+a*(-b)$$

$$(-a)*(-b)-a*b+a*(-b)-a*(-b)=0$$

첫째와 세째항은 $(-b)$를 그리고 둘째와 네째에서는 $(-a)$를 이용하여 배분법칙을 적용하면,

$$((-a)+a)*(-b)+(b+(-b))*(-a)=0$$

$$0*(-b)+0*(-a)=0$$

그러므로 음수 곱하기 음수는 양수가 된다.