

Lagrangian Formulation

KITECH 양광웅 작성

Page365@gmail.com

기계적 시스템의 동역학 모델링을 위한 라그랑제 공식은,

$$L = T - U$$

T 는 운동에너지(global kinetic energy)이고, U 는 위치에너지(global potential energy)이다. 운동 방적인 아래의 n 개의 라그랑제 방정식(Lagrange's equation)으로 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} - \frac{\delta L}{\delta q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n$$

τ_i 는 관절변수 q_i 에 작용하는 비보존되는 일반화된 힘(generalized non-conservative force)을 나타낸다. 직선관절(prismatic joint)에서는 힘(force)을 말하고, 회전관절(revolute joint)에서는 토크(torque)를 말한다. 비보존 힘은 마찰(friction)력 구동력(driving force)을 포함한다.

운동 방정식

Euler-Lagrange 운동 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

$\mathbf{q}$ 는 관절 변수의 벡터 값이고, $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 는 관성 행렬(inertia matrix)이고, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ 은 코리올리(Coriolis)와 원심력(centrifugal) 항이고, $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ 는 중력 항이고, $\boldsymbol{\tau}$ 는 제어를 위해 사용자가 입력하는 토크 이다.

관성 행렬

관성 행렬은 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{J}_{v_{ci}}^T \mathbf{J}_{v_{ci}} + \mathbf{J}_{\omega_{ci}}^T \mathbf{R}_i \mathbf{I}_i \mathbf{R}_i^T \mathbf{J}_{\omega_{ci}})$$

여기서 m_i 는 i 번째 링크의 질량이고, $\mathbf{I}_i$ 는 i 번째 링크의 관성 텐서이고, $\mathbf{R}_i$ 회전 행렬이다.

$\mathbf{J}_{v_{ci}}$ 와 $\mathbf{J}_{\omega_{ci}}$ 는 다음과 같이 계산한다.

$$\mathbf{J}_{v_{ci}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{v_{ci}}^1 & \dots & \mathbf{J}_{v_{ci}}^i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{\omega_{ci}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\omega_{ci}}^1 & \dots & \mathbf{J}_{\omega_{ci}}^i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

행(column) 요소의 값은 아래 식으로 계산하여 얻을 수 있다.

$$\mathbf{J}_{v_{ci}}^j = \begin{cases} \mathbf{z}_{j-1} & \text{for a prismatic joint} \\ \mathbf{z}_{j-1} \times (\mathbf{p}_{ci} - \mathbf{p}_{j-1}) & \text{for a revolute joint} \end{cases}$$

$$\mathbf{J}_{\omega_{ci}}^j = \begin{cases} 0 & \text{for a prismatic joint} \\ \mathbf{z}_{j-1} & \text{for a revolute joint} \end{cases}$$

$\mathbf{p}_{ci}$ 는 기저로부터 링크 i 의 질량중심까지의 벡터다.

코리올리와 원심력 항

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 행렬의 k, j 번째 요소는 다음과 같이 계산된다.

$$c_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k$$

b_{ij} 는 $\mathbf{M}$ 행렬의 i, j 번째 요소다. 여기서 $\partial b_{ij} / \partial q_k$ 를 얻기 위해서는 $\mathbf{M}$ 행렬을 $\mathbf{q}$ 로 편미분 해야한다.

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \left(m_i \frac{\partial \mathbf{J}_{v_{ci}}^T}{\partial q_k} \mathbf{J}_{v_{ci}} + m_i \mathbf{J}_{v_{ci}}^T \frac{\partial \mathbf{J}_{v_{ci}}}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathbf{J}_{\omega_{ci}}^T}{\partial q_k} \mathbf{R}_i \mathbf{I}_i \mathbf{R}_i^T \mathbf{J}_{\omega_{ci}} + \mathbf{J}_{\omega_{ci}}^T \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial q_k} \mathbf{I}_i \mathbf{R}_i^T \mathbf{J}_{\omega_{ci}} + \mathbf{J}_{\omega_{ci}}^T \mathbf{R}_i \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{R}_i^T}{\partial q_k} \mathbf{J}_{\omega_{ci}} + \mathbf{J}_{\omega_{ci}}^T \mathbf{R}_i \mathbf{I}_i \mathbf{R}_i^T \frac{\partial \mathbf{J}_{\omega_{ci}}}{\partial q_k} \right)$$

여기서 $\partial \mathbf{J}_{v_{ci}} / \partial q_k$ 와 $\partial \mathbf{J}_{\omega_{ci}} / \partial q_k$ 는 다음과 같이 계산한다.

$$\frac{\partial \mathbf{J}_{v_{ci}}}{\partial q_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{J}_{v_{ci}}^1}{\partial q_k} & \dots & \frac{\partial \mathbf{J}_{v_{ci}}^i}{\partial q_k} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}_{\omega_{ci}}}{\partial q_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{J}_{\omega_{ci}}^1}{\partial q_k} & \dots & \frac{\partial \mathbf{J}_{\omega_{ci}}^i}{\partial q_k} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

행(column) 요소의 값은 아래 식으로 계산하여 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{J}_{v_{ci}}^i}{\partial q_k} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{z}_{j-1}}{\partial q_k} & \text{for a prismatic joint} \\ \frac{\partial \mathbf{z}_{j-1}}{\partial q_k} \times (\mathbf{p}_{ci} - \mathbf{p}_{j-1}) + \mathbf{z}_{j-1} \times \left(\frac{\partial \mathbf{p}_{ci}}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathbf{p}_{j-1}}{\partial q_k} \right) & \text{for a revolute joint} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}_{\omega_{ci}}^j}{\partial q_k} = \begin{cases} 0 & \text{for a prismatic joint} \\ \frac{\partial \mathbf{z}_{j-1}}{\partial q_k} & \text{for a revolute joint} \end{cases}$$

여기서 $\partial \mathbf{R}_i / \partial q_k$ 와 $\partial \mathbf{z}_{j-1} / \partial q_k$, $\partial \mathbf{p}_{ci} / \partial q_k$, $\partial \mathbf{p}_{j-1} / \partial q_k$ 는 자코비안의 미분 $\partial \mathbf{T}_i / \partial q_k$ 으로부터 얻을 수 있다. (22. Differentiation of Jacobian.docx 문서 참조)

$$\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial q_k} & \frac{\partial \mathbf{o}_i}{\partial q_k} & \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial q_k} & \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial q_k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial q_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial q_k} & \frac{\partial \mathbf{o}_i}{\partial q_k} & \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial q_k} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial q_k} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial q_k} & \text{for x-axis} \\ \frac{\partial \mathbf{o}_i}{\partial q_k} & \text{for y-axis} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial q_k} & \text{for z-axis} \end{cases}$$

중력 항

중력 항의 j번째 요소는 다음과 같다.

$$G_j = - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}_0^T \mathbf{J}_{v_{ci}}^j$$

$\mathbf{g}_0$ 는 중력 벡터다.

Inverse Dynamics

Inverse dynamics는 관절의 위치 $\mathbf{q}$, 속도 $\dot{\mathbf{q}}$, 가속도 $\ddot{\mathbf{q}}$ 를 알 때 관절에 작용하는 토크 $\boldsymbol{\tau}$ 를 계

산하는 과정이다. 이때, 토크는 다음과 같이 마찰력을 고려하여 계산할 수 있다.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + F_v \dot{\mathbf{q}} + F_s \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})$$

여기서, F_v 는 viscous friction 이고, F_s 는 Coulomb friction 이다. $\text{sgn}(\cdot)$ 함수는 양수일 때 1을, 음수일 때 -1의 값을 돌려준다. $\mathbf{g}$ 는 중력가속도로, 보통 $\mathbf{g} = [0 \ 0 \ -9.81]^T$ 로 설정한다.

Forward Dynamics

Forward dynamics는 관절의 위치 $\mathbf{q}$, 속도 $\dot{\mathbf{q}}$, 토크 $\boldsymbol{\tau}$ 를 알 때 관절의 가속도 $\ddot{\mathbf{q}}$ 를 계산하는 과정이다.

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1}(\boldsymbol{\tau}_d - (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + F_v \dot{\mathbf{q}} + F_s \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})))$$

여기서, F_v 는 viscous friction 이고, F_s 는 Coulomb friction 이다. $\text{sgn}(\cdot)$ 함수는 양수일 때 1을, 음수일 때 -1의 값을 가진다. $\boldsymbol{\tau}_d$ 는 로봇을 제어하기 위해 사용자가 입력한 토크다.

에너지

전체 링크의 에너지는 운동 에너지와 위치 에너지의 합이다.

$$E = T + U$$

전체 링크의 운동 에너지(kinetic energy)는 아래처럼 쓸 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

전체 링크의 위치 에너지(potential energy)는 U 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$U = -\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{ci}$$