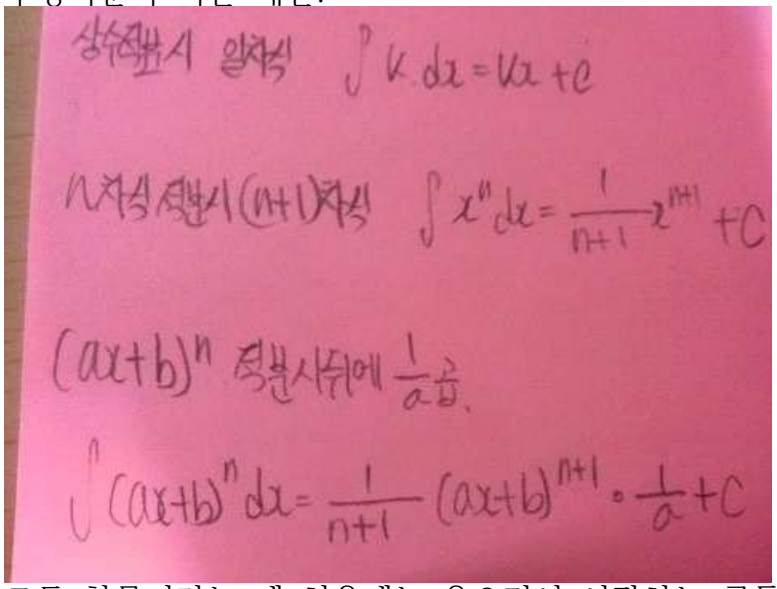
정적분은 넓이라고 정의한다. (넓이는 항상 양수이지만 정적분은 음수도 가능)
부정적분은 미분의 역연산이라고 정의한다.

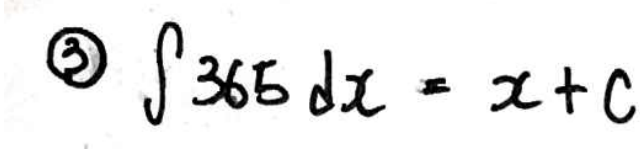
부정적분을 사용하여 정적분 문제를 풀기 때문에 부정적분은 중요하다.

## 부정적분의 기본

부정적분의 기본 계산.




모든 학문이라는 게 처음에는 웃으면서 시작하는 공통점이 있는 것 같다. 마찬가지로 부정적분의 기초는 껄끄럽지 않게 다가온다.




상수를 적분하면 1차식이 된다.

③ $\int (2x+1)^3 dx = \frac{1}{3+1}(2x+1)^{3+1} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{1}{8}(2x+1)^4 + C$

전체 3승이므로 승자리에는 3+1승을 해주고 앞의 상수부분은 3+1의 역수를 취해준다. **마지막으로 속에 있는 일차항의 계수를 역수를 취해 곱해**준다.
**계수의 역수를 취해주는 건 괄호속의 식이 일차식일 때만** 통한다.

(필자의 편의상 '제곱'표현 대신 '승'을 사용한 점 양해부탁드립니다;)

⑤ $\int (x^4 + 2x^2 - 3) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - 3x + C$

위 문제는 보는 것 만으로도 쉽게 풀린다.

우리가 눈 여겨 보아야 할 것은
**계수들은 그대로 살아있다**는 점
**식이 +와 -로만 구성**되어 있다는 점

⑦ $\int \frac{y^3+8}{y+2} dy = \int \frac{(y+2)(y^2-2y+4)}{y+2} dy = \int (y^2-2y+4) dy = \frac{1}{3}y^3 - y^2 + 4y + C$

여기 이 분수식은 어떻게 보면 *또는 ÷로 되어있는 식이라고 볼 수 있다.
**+와 -로만 구성되어 있는 식으로 고쳐야 한다.**
고치고나선 위의 5번 문제와 같이 계산한다.

$$\int (x+1)^2 dx - \int (x-2)^2 dx = \int \{(x+1)^2 - (x-2)^2\} dx = \int 6x\,dx = 4x^2 + C$$

**둘다 같은 변수 dx를 쓴다는 사실에 착안하여 두 식을 과감히 합치고** 곱해져있는 각각의 식을 전개하여 +와 -로만 구성되어있는 식으로 간단히 한다.
쉽게 풀렸다.

$$\int \left(\frac{3}{x} - 3 + \frac{1}{x^3} + \sqrt{x}\right) dx = 3\ln|x| - 3x - \frac{1}{4x^4} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

방금 전까진 사실 준비운동에 그쳤다. 우리가 미분시간 때 ln x 의 미분을 1/x 라고 배웠던 때를 기억하고 있다. ln IxI 의 미분 또한 1/x라고 배웠다.

**1/x 의 부정적분은 ln IxI + c** 이다. **왜 x에 절댓값을 붙이냐면 로그의 진수조건 ( ln x 의 정의역은 양수이지만 1/x 의 정의역은 음수도 포함) 때문**이다.

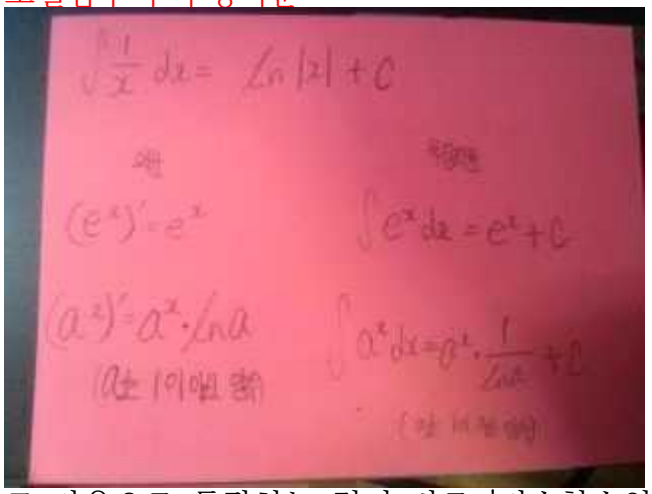
방금 알려준 개념을 토대로 위의 문제를 풀어보면 3/x 에서 상수3은 역시 그대로 살려주고 1/x 의 부정적분 ln IxI 를 끄집어 낸다. 나머지는 우리가 배웠던 것과 같이 해주면 되는 데 낯설게 느껴진다면 수I 때 배웠던 지수파트의 개념을 떠올리면서 계산해준다. 그래도 모르겠다면 창을 닫고 하산하자.

$$\int \frac{x^2 + 4x - \sqrt{x} + 1}{x} dx = \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{4x}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \int \left(x + 4 - x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 2x^{\frac{1}{2}} + \ln|x| + C$$

(저기 시커먼 덩어리는 -1/2를 의미합니다. 연필대신 볼펜을 써서 죄송합니다.)

편안한 마음으로 ÷x 로 되어 있는 식을 간단하게 고쳐주고 지금 까지 배운 개념을 토대로 해결한다.

초월함수의 부정적분




그 다음으로 등장하는 것이 바로 '지수함수의 부정적분'이다. 미분때 배웠던 공식을 통해 거꾸로 생각하면 당연하게 나오는 식이다. 하지만 헷갈리므로 유심히 살펴보자.(나만 그럴지도)

$$\int (2e^x - 1)^2 dx = \int (4e^{2x} - 4e^x + 1)\, dx = 4e^{2x} \cdot \frac{1}{\ln e^2} - 4e^x + x + C$$

두번 곱해져 있는 식이므로 +와 -로만 이루어진 식으로 전개해주고
상수계수는 그래도 남겨둔 채 위의 개념을 갖고 해결한다.

**그런데 e의 2x승 이 껄끄럽게 느껴진다. 위 분홍색 개념에서 a의 x승을 나타내는 개념에서**

**a대신 e의 2승을 넣어주면 간단히 해결 할 수 있다. (e도 사실 상수 개념)**

$$㉞ \int \frac{x\cdot 5^x+3}{x}dx = \int 5^x + \frac{3}{x} = \frac{5^x}{\ln 5} + 3\ln|x| + C$$

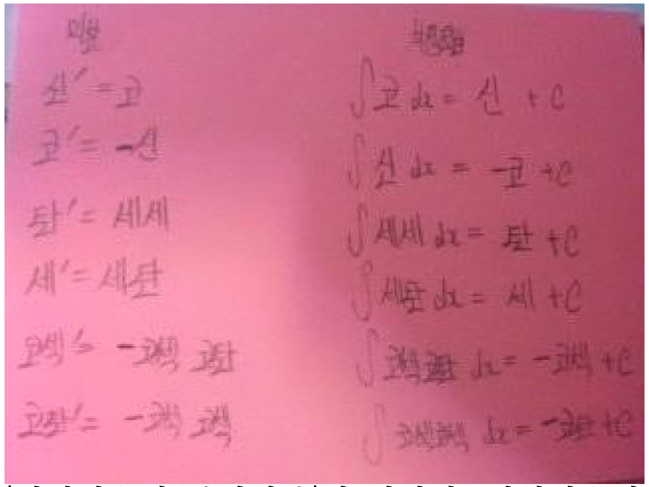
이 문제는 '지수함수의 부정적분'과 '1/x의 부정적분'개념을 동시에 사용하면 쉽게 풀린다.

$$㉟ \int (3^x - 3^{-x})^2 dx = \int (3^{2x} - 2 + 3^{-2x})\,dx = \frac{9^x}{\ln 9} - 2x + \frac{1}{9^x \ln 9} + C$$

다소 껄끄럽게 느껴지지만 일단 두번 곱해진 제곱을 +와 -로만 이루어진 식으로 간단히 전개한 후에

3의 2x 승을

9의 x 승으로 고쳐 생각하면 쉽게 풀린다.




'삼각함수의 부정적분'이 나왔다. 삼각함수의 미분 과정을 반대로 해주면 된다.

$$\textcircled{36}\int(\sin x-\sqrt{3}\cos x)\,dx=-\cos x-\sqrt{3}\sin x+C$$

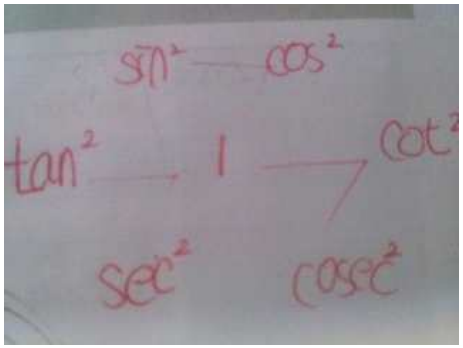
위의 개념을 사용하여 문제를 푼다.
√3은 상수계수이므로 그대로 냅두고 계산한다.

$$\textcircled{36}\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\,dx=\int(1-\cos x)\,dx=x-\sin x+C$$

우리가 자주쓰는 삼각함수의 성질
sinx^2 + cosx^2 = 1을 응용하여 +와 -로만 이루어져있는 간단한 식으로 고친다.
문제를 푼다.

$$\textcircled{36}\int\sec x(\sec x+\tan x)\,dx=\int(\sec^2 x+\sec x\tan x)\,dx=\tan x+\sec x+C$$

* 로 되어있는 것들을 정리하여 +와 -로만 이루어져 있는 간단한 식으로 고친다. 여기서 sec x * tan x 은 부정적분의 공식이므로 남겨둔다.
삼가함수의 부정적분 공식에 익숙해져야만 쉽게 풀수 있다는 것을 알 수 있다.




(38) $\int \cot^2 x\,dx = \int (\mathrm{cosec}^2 x - 1)\,dx = -\cot x - x + C$

1+ (cot x)^2 = (cosec x)^2 임을 이용하여 +와 -로만 이루어져 있는 간단한 식으로 고친다.

그 다음엔 삼각함수의 부정적분 공식을 이용한다.

(38) $\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + C$

(tanx)^2 + 1 = (sec x)^2 임을 이용하여 +와 -로만 이루어져 있는 간단한 식으로 고친다.

마찬가지로 삼각함수의 부정적분 공식을 이용한다.

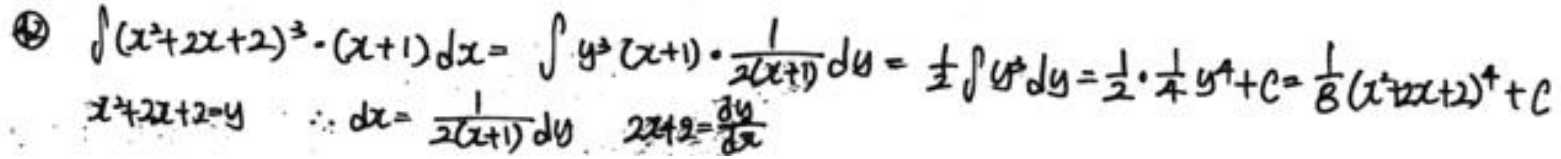
부정적분의 치환적분법

(40) $\int (x^2+x+1)^5 \cdot (2x+1)\,dx = \int y^5\,dy = \frac{1}{6}y^6 + C = \frac{1}{6}(x^2+x+1)^6 + C$

첫번째 괄호 안의 식을 미분한 식이 두번째 괄호 안에 들어있는 문제다.

첫번째 괄호를 y로 치환한다. x^2 + x + 1 = y
첫번째 괄호를 x로 미분한다. 2x + 1 = dy/dx = y'
자연스럽게 (2x + 1)dx = dy가 되었다.

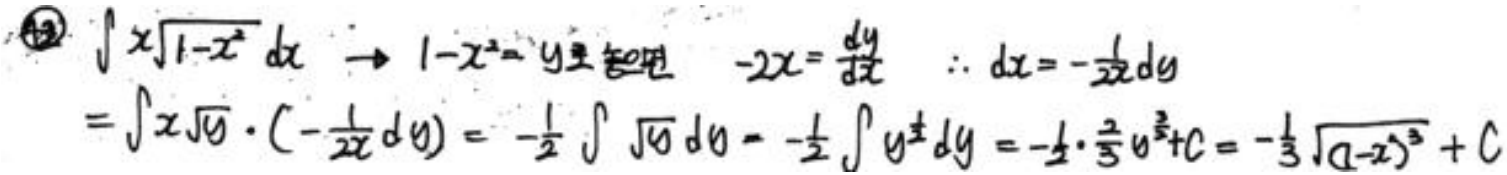
그럼 y^5식만 적분하면 된다.
적분을 해주고 y값에 원래의 x^2 + x + 1을 넣어주면 된다.



마찬가지로 첫번째 괄호가 미분된 것에서 전체를 2로 나눈 이 두번째 괄호다. 위의 문제와 비슷해보이지만 약간 다르다.
x^2 + 2x + 2 = y 로 둔다.
그다음 미분한 2x + 2 = dy/dx 가 된다.
그런데 여기선 dx 와 2x 의 위치를 바꾸어 dx = 1/2x+2 로 만든다. 왜 이렇게 바꾸었냐면 상수의 곱을 생각해서 바꾸어주었다.

자연스럽게 1/2가 앞으로 나오면서 위의 문제와 같은 꼴이 된다. 적분다 해주고 다시 y = x^2 + 2x + 2로 고쳐준다.

그리고 위의 방법이 자주 쓰인다. dx = 어쩌구 저쩌구.



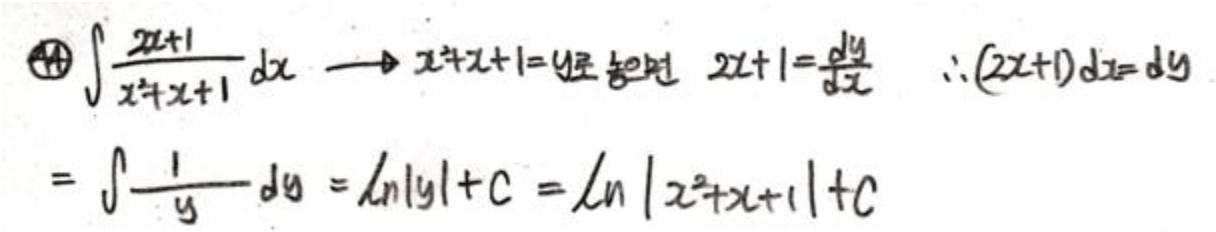
루트가 곱해져있는 식이다. 루트안을 치환하자.
1-x^2=y 로 치환.

치환한 식을 미분한다.

-2x = dy/dx

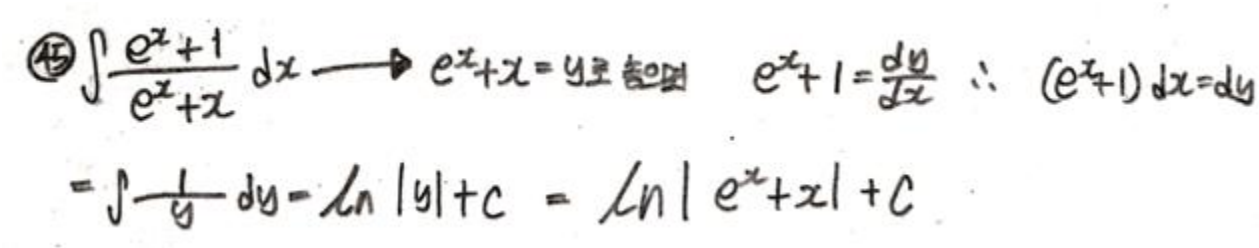
위에서 말한 것처럼 dx= (-1/2x) dy로 고친다.

루트 안에만 치환해져있고, 위의 dx의 값을 넣어주면 y에 관한 적분문제가 나온다. 적분 한 후 원래의 1-x^2을 y에 넣어주면 끝.



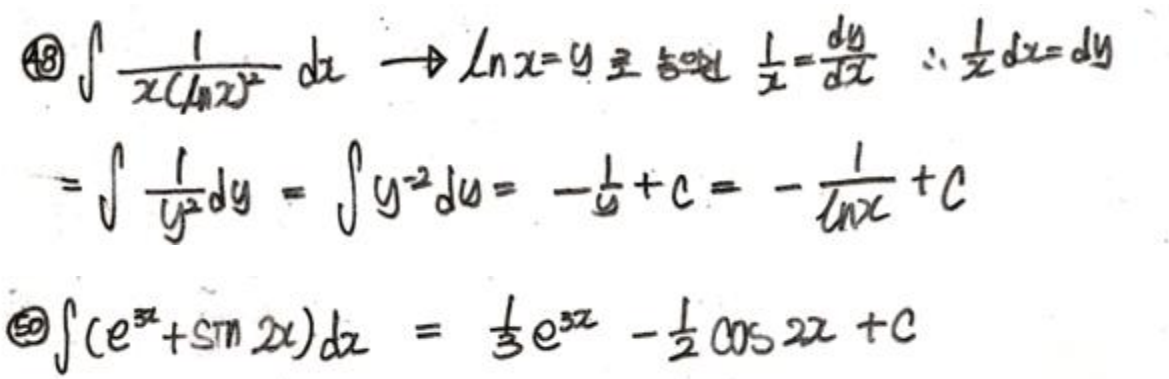
분모를 치환하여 전에 풀었던 문제와 같은 방법으로 풀면 된다.

1/y를 적분하면 ln |y| + c 라는 사실을 기억하면서..



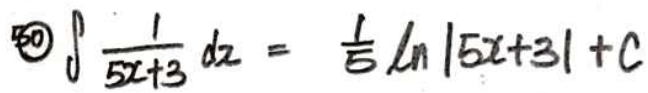
분모를 치환하여 전에 풀었던 문제와 같은 방법으로 풀면 된다.

1/y를 적분하면 ln |y| + c 라는 사실을 기억하면서..

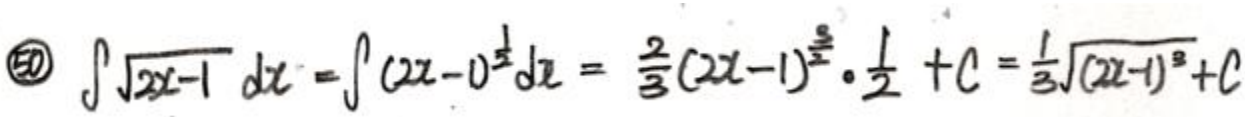


ln x를 치환하여 전에 풀었던 문제와 같은 방법으로 풀면 된다.

일차식이 있는 치환적분법



그냥 1/X 를 적분해주었다고 생각하면 된다. 하지만 분모속의 식이 일차식이므로 x의 계수의 역수 ( 1/5 ) 를 곱해주어야 한다.
모든 일차식 부정적분은 일차식 x의 계수의 역수를 곱해주어야 한다.



위와 마찬가지로 루트 일차식을  루트X 를 미분한 식이라고 보면 된다.
그 다음 일차식의 계수의 역수를 곱해준다음 적분해주면 끝.

$$⑨\ \int \frac{1}{(3x+1)^2}\,dx = \int (3x+1)^{-2}\,dx = \frac{1}{3}(3x+1)^{-1}\cdot\frac{1}{3}+C = -\frac{1}{9x+3}+C$$

그냥 마음편하게 적분해주면 된다. 하고나서 일차식(3x+1)의 계수의 역수 1/3을 곱해주면 된다.

$$⑧\ 2\int e^{10x}\,dx = 2\cdot\frac{1}{10}e^{10x}+C$$

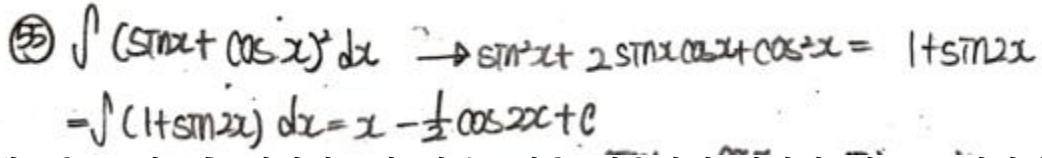
삼각함수를 응용한 부정적분

$$②\ \int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

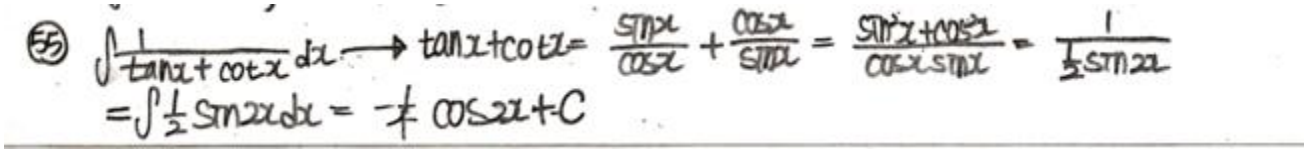
삼각함수의 반각공식을 이용하고 곱하기 꼴로 된 식을 +와 - 로 이루어진 식으로 바꾼 후 적분해주면 된다.

$$②\ \int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

위의 문제와 같은 방식으로 풀어준다.

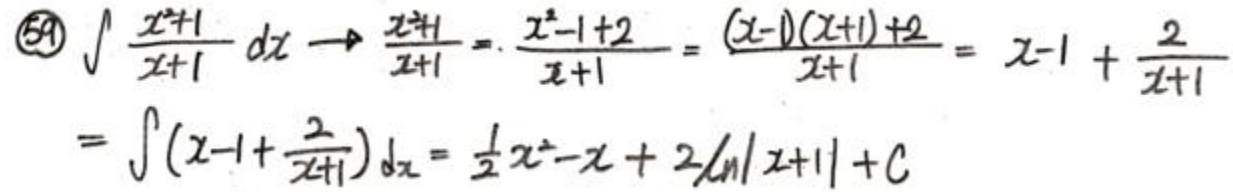


제곱을 풀어준후 삼각함수의 기본공식을 이용하면 간단한 식으로 정리된다. 그대로 적분해주면 된다. (sin 2x)에서 x의 계수의 역수 1/2를 꼭 곱해주어야 한다.



tan와 cot를 sin과 cos에 대한 식으로 고친후 cosxsinx=1/2 sin2x 라는 사실을 이용한다. 그다음 원래의 식에 대입한 후 적분하면 해결된다. (sin 2x에서 x의 계수의 역수 1/2를 꼭 곱해야한다.)

## 부분분수와 부정적분



쉽게 해결될 것 같지 않아보이지만 분자가 분모보다 큰 것을 우선 정리한다.
정리하고나면 쉽게 해결된다.

$$\textcircled{59}\ \int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}\,dx \longrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)+2x}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= \int \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right) dx = x + \ln|x^2+1| + C = x + \ln(x^2+1) + C$$

분자가 분모보다 큰 것을 정리한다.

그 다음 나오는 식이 곤란하게 보인다면 분모를 치환하는 치환적분법을 떠올리면 된다. 자연스럽게 2x dx가 합쳐지면서 최종적으로 ln I x^2 + 1I 이 된다.

$$\textcircled{61}\ \int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx \longrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

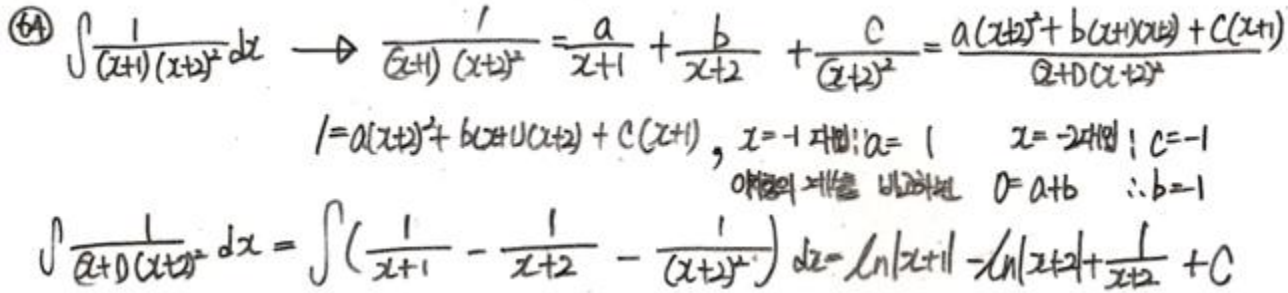
$$1 = a(x+2) + b(x+1), \quad x=-1 \text{ 대입: } a=1 \quad x=-2 \text{ 대입: } b=-1$$

$$\therefore \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + C$$

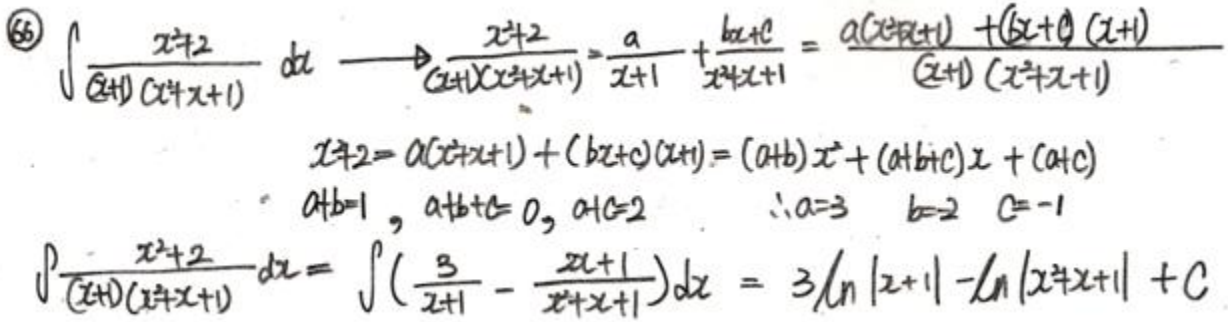
곱하기를 따로 찢어주면 +- 꼴의 식이 나온다. 우리는 계수를 알지못하므로 분자는 분모에서 미분된 차수와 같은 미지수 a,b르 놓고 통분해주면 a와 b값을 알 수 있다.
그다음 적분을 풀어주면 된다.

(부분분수로 고쳐서 푸는 방법도 있다)



아까 풀었던 문제와 비슷하지만, 여기선 분모가 (x+1), (x+2), (x+2)^2 세 개의 식을 만들어주어야 한다. 분자는 분모에서 미분된 차수와 같은 미지수 a,b,c로 하자..

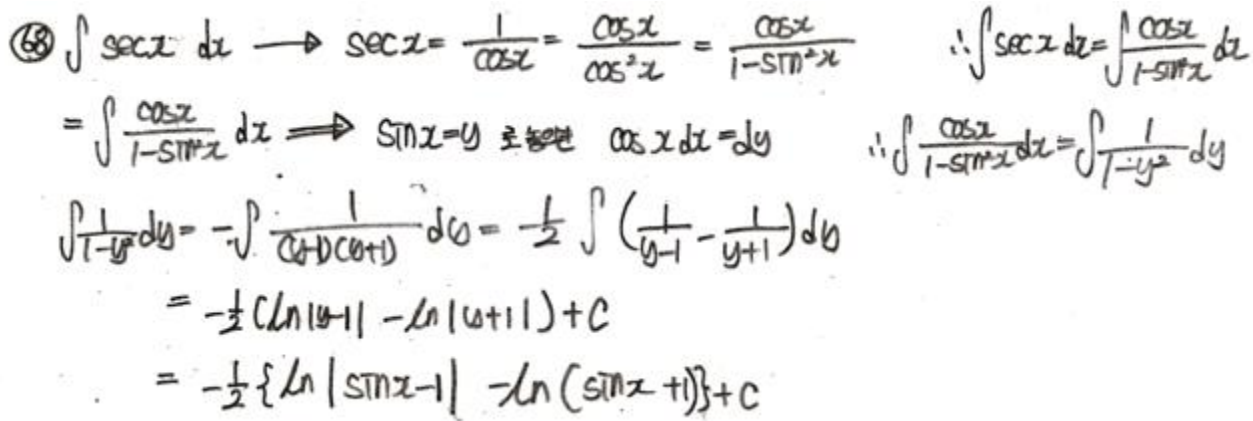
연립해서 미지수를 풀어내면 된다.
그 다음은 기본 적분으로 풀어내면 된다. (마지막것도 바로 해결된다 x의 계수가 1이기 때문에)



분모에 완전제곱식이 아닌 이차식이 있을 때는 방식이 약간 다르다.
우선 둘을 찢어준다음에 분자는 분모에서 미분된 차수와 같은 a와 bx+c로 해준다.
둘을 통분하고 연립하여 a, b, c의 값을 알아낸 후 적분하면 된다.

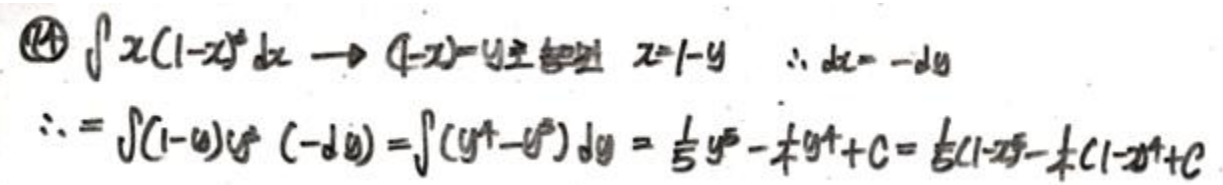
기본적분법과 치환적분법을 사용하여 문제를 풀어낸다.

특수한 치환적분법(높은 차수의 식, 루트식, e^x가 주로 치환된다)



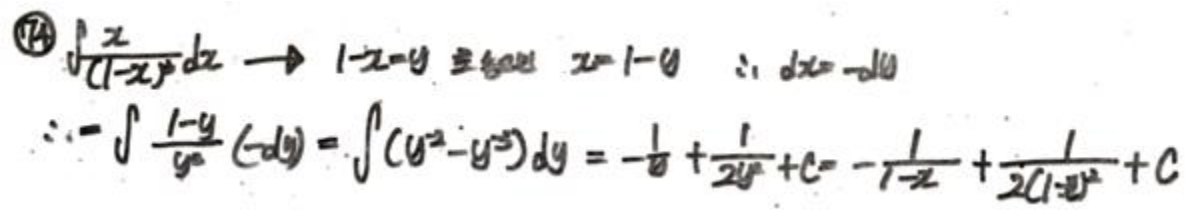
sec x를 1/cos x로 고쳐준 후 분모와 분자에 cosx 를 곱해주어 분모를 변형시켜주는 감각이 필요하다.
분모를 미분한 식이 분자 꼴 형태로 만들기 위해선 sin x를 y로 치환하여 문제를 풀면 cosx dx는 자연스럽게 dy가 된다.

그 후 y에 관한 부정적분을 풀면 된다.



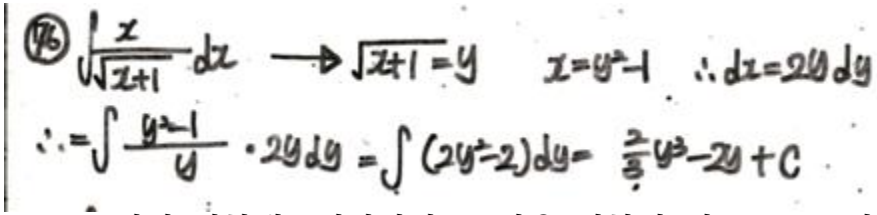
가장 차수가 높은 식을 치환한다. 여기선 (1-x)^3이 가장 높은 식이다. y = (1-x)
dx = 어쩌구저쩌구. 를 구하기 위해선 x를 따로 빼서 정리해야한다. 그다음 미분하면 dx=-dy를 구할 수 있다.

그대로 치환한 식을 적용하여 적분해준 후 치환전의 원래식을 적용시킨다.



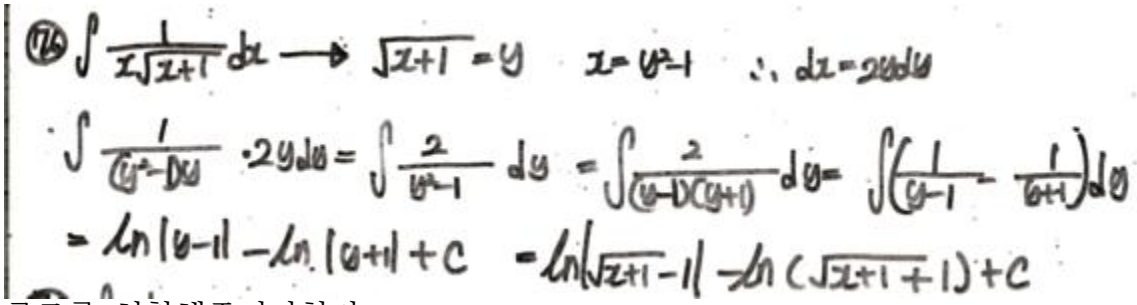
분수식에서는 분모가 분자보다 커야한다. 이 조건을 만족하므로 따로 정리하지 않아도 된다. 분모가 가장 차수가 큰 식이라면 치환한다.
(1-x) = y

dx=어쩌구저쩌구. 로 나타낼려면 x만 남기고 이항. 그다음 미분하면 dx를 구할 수 있다.
그 다음 치환한 식을 적분한 후 원래의 식을 y에 넣어주면 끝.



루트를 먼저 치환해주어야한다. 그다음 치환된 식중 dx를 만들기 위해선 x만 남기고 이항시킨 후 미분하면 dx가 만들어진다.

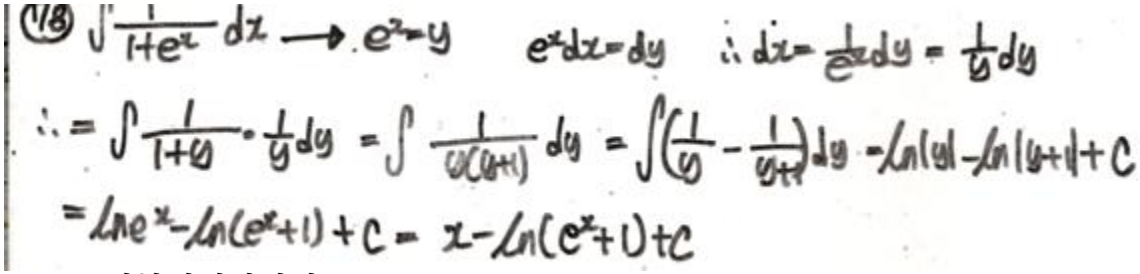
dx를 구했으니.
y로 정리된 식을 적분한 후 원래의 값을 넣어준다.



루트를 치환해주어야한다.

루트의 식을 y로 놓고. dx를 구하기위해서 x만 남기고 전부 이항시킨후 미분해서 dx를 구한다.

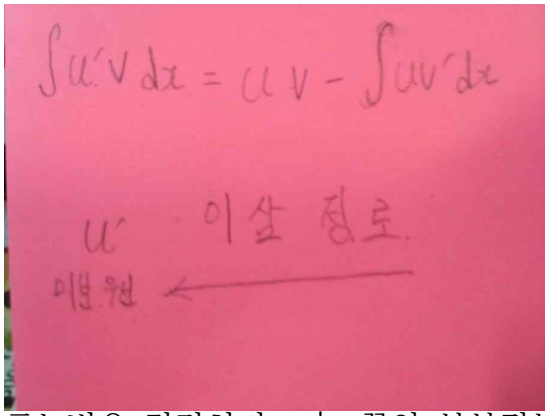
y에 관한 식을 적분시킨다. 부분분수로 고쳐준다음 풀면된다.
다 정리하고 원래식을 y대신 넣는다.



e^x를 치환시켜야한다.
x만 남겨놓고 전부 이항시킨 후 dx를 구한다.

y에 관한 식을 적분시킨다.
다 정리하고 원래식을 y대신 넣는다.

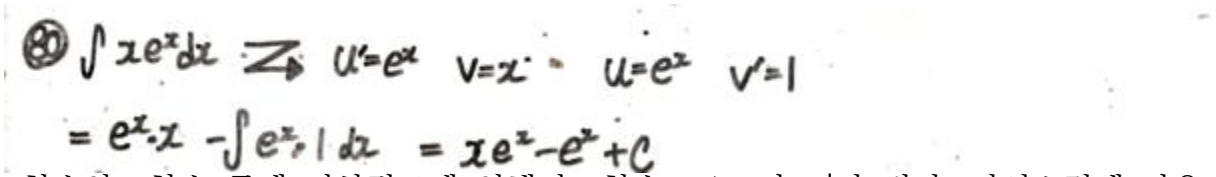
부분적분법



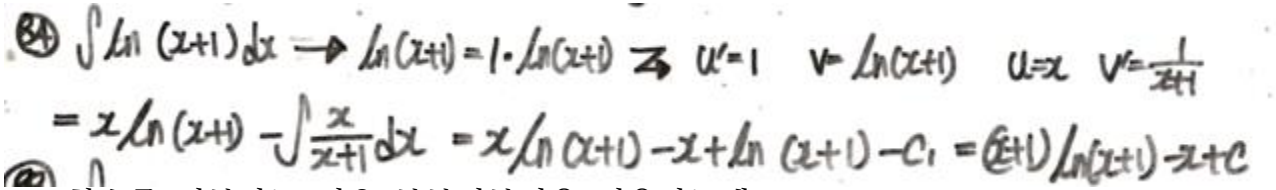

푸는법은 간단하다. u'v 꼴의 부분적분 문제들을 위와 같은 uv - uv'의 부정적분

으로 푸는데 u'를 무엇으로 해야할지 정한다면
e함수 - 삼각함수 - 정수함수 - 로그함수

순으로 u'의 우선순위를 정할 수 있다.



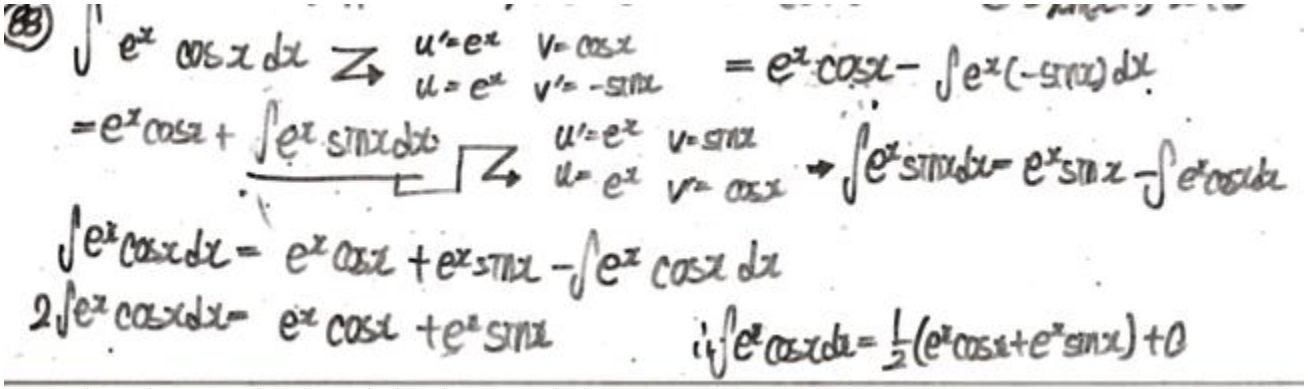

x함수와 e함수 중에 이삼정로에 의해서 e함수  e^x 가 u'가 된다. 자연스겁게 남은 x는 v가 된다.
부분적분법에 의해서 계산된다.



로그함수를 적분하는 법은 부분적분법을 이용하는데.

ln함수와 보이지않는 함수 1(정수함수)로 구성되어있는 데 이삼정로에 의해서 정수함수 1이 u'가 되고 ln(x+1)이 v가 된다.

부분적분법을 사용하여 계산한다.



부분적분법을 두번 사용해야 하는 문제다.

그이유는 문제를 처음 적분해서는 뒤에나오는 e^x(-sinx)를 간단하게 나타낼 수 없기 때문에 e^x(-sinx)를 다시 적분해주어야 하기 때문이다.

하지만 별다른 문제가 없다.
그냥 두번째 나온 결과를 첫번째 결과에 붙여 넣어주면 되면 끝이 난다.
[